1. Runde der Mathematik-Olympiade 2025/2026

am Friedrich-Dessauer-Gymnasium in Aschaffenburg

Der Wettbewerb richtet sich an alle Schülerinnen und Schüler der Klassen 5 bis 13.

Lösungen können bis zum **30.10.2025** bei den Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern (alternativ bei Frau Rank im Lehrerzimmer) abgegeben werden.

Erfolgreiche Teilnehmerinnen und Teilnehmer werden nach den Herbstferien über ihr Ergebnis informiert Sie qualifizieren sich für die zweite Runde der Mathematik-Olympiade, die am 12.11.2025 als Regionalrunde (Klausurenwettbewerb) stattfinden wird.

Eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen ist untersagt.

Der gemeinnützige MOBy e.V. erinnert daran, dass eine Diskussion der aktuellen Wettbewerbsaufgaben in Internetforen und sozialen Medien untersagt ist.

Die Aufgaben finden sich auf den folgenden Seiten. ***Bitte auf die Auswahl der richtigen Jahrgangsstufe achten!***

Olympiadeklasse

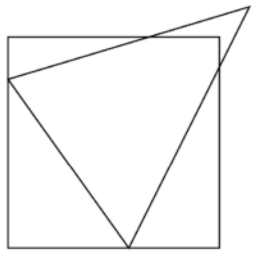
5

65. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch richtig und in grammatisch korrekten Sätzen dar.*

650511

In der Abbildung sind ein Quadrat und ein Dreieck dargestellt, die genau vier gemeinsame Punkte haben.



Fertige die Zeichnungen für die Lösungen der Aufgaben a) bis e) mit Bleistift und Lineal an. Du brauchst keine Begründungen zu schreiben.

a) Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau einen gemeinsamen Punkt haben.
b) Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau zwei gemeinsame Punkte haben.
c) Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau drei gemeinsame Punkte haben.
d) Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau fünf gemeinsame Punkte haben.
e) Zeichne ein Quadrat und ein Dreieck so, dass die beiden Figuren genau sechs gemeinsame Punkte haben.

650512

Gesucht werden Zahlen, die alle fünf folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(1) Die Zahl ist fünfstellig, sie hat also fünf Ziffern.
(2) Alle ihre Ziffern sind gerade, und keine Ziffer kommt mehr als einmal vor.
(3) Das Doppelte der Zahl ist bereits sechsstellig.
(4) Wenn man die Zahl durch fünf teilt, erhält man den Rest eins.
(5) Wenn man die Zehnerstelle der Zahl mit der Hunderterstelle multipliziert, ergibt sich null, ebenso, wenn man die Zehnerstelle mit der Tausenderstelle multipliziert.

Ermittle alle Zahlen, die alle fünf Bedingungen erfüllen. Das heißt, du musst zeigen, dass jede Zahl, die du gefunden hast, alle fünf Bedingungen erfüllt, und dass es keine weiteren solcher Zahlen gibt.

Hinweis: Die 0 ist eine gerade Zahl.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

650513

Julia hat viele kurze Stäbchen der Länge 10 cm und viele lange Stäbchen der Länge 20 cm. Sie will damit eine Strecke von 70 cm legen.

a) Gib an, welche unterschiedlichen Anzahlen an 20-cm-Stäbchen sie dazu verwenden kann.
b) Julia will nun genau zwei 20-cm-Stäbchen benutzen. Überlege, wie sie die benötigten Stäbchen nebeneinander von links nach rechts anordnen kann, um die 70 cm lange Strecke zu legen.
   Ermittle die Anzahl der verschiedenen Anordnungen.
c) Ermittle jetzt die Anzahl **aller** möglichen Anordnungen, wie Julia aus 10-cm-Stäbchen und 20-cm-Stäbchen die Strecke von 70 cm legen kann.

650514

Bea, Emil, Svenja und Victor waren am Eisstand und haben sich jeweils eine Kugel Eis gekauft. Heute gab es die Sorten Banane, Erdbeere, Schoko und Vanille.

Die Kinder hatten verabredet, dass niemand eine Eissorte nimmt, die mit dem gleichen Buchstaben anfängt wie sein Vorname, und jedes Kind wollte eine andere Sorte nehmen.

Ermittle, wer welche Eissorte genommen hat, wenn folgendes bekannt ist:

(1) Bea hat nicht das Erdbeereis genommen.
(2) Svenja hat nicht das Bananeneis genommen.
(3) Emil hat sein Lieblingseis genommen, nämlich Schoko.

Stelle dar, wie du deine Lösung erhalten hast.

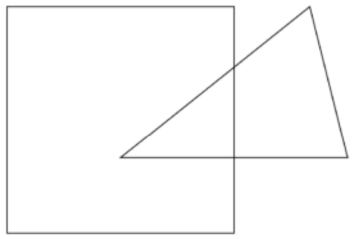
Olympiadeklasse 6

65. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch richtig und in grammatisch korrekten Sätzen dar.*

650611

In der Abbildung sind ein Quadrat und ein Dreieck dargestellt, die gemeinsam genau drei Teilflächen enthalten.



Man kann ein Quadrat und ein Dreieck so zeichnen, dass zwei, drei, vier, fünf, sechs bzw. sieben Teilflächen entstehen.

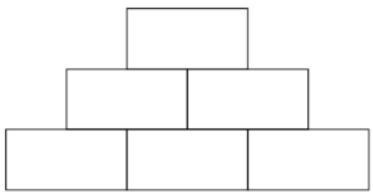
Zeichne für jede Anzahl von Teilflächen ein Beispiel.

Verwende zum Zeichnen deiner Lösungen Bleistift und Lineal!

650612

Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 sollen in dieser Reihenfolge in die sechs Felder der abgebildeten Zahlenmauer so eingetragen werden, dass folgende Bedingung erfüllt ist:

Eine Zahl darf nur dann in ein Feld der oberen Reihen eingetragen werden, wenn die beiden Felder darunter bereits belegt sind.



a) Zeichne zwei Zahlenmauern, die nach diesen Regeln gefüllt sind.

b) Untersuche, wie viele verschiedene Zahlenmauern es nach diesen Regeln gibt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

650613

Fünf Orte sollen durch Straßen verbunden werden, und zwar mit folgenden Bedingungen:

- Von jedem Ort soll man zu jedem anderen gelangen können.
- Zwischen zwei Orten darf es nicht mehr als eine Straße geben.
- Die Straßen dürfen sich nicht kreuzen, es gibt auch keine Brücken.

a) Zeichne fünf Punkte für die Orte. Verbinde sie durch möglichst wenige Straßen. Wie viele Straßen muss es mindestens geben?

b) Zeichne wieder fünf Punkte für die Orte und verbinde sie mit möglichst vielen Straßen. Wie viele Straßen sind unter den genannten Bedingungen möglich?

650614

Leon packt seinen Koffer für eine Inlineskate-Klassenreise. Dafür braucht Leon einige Gegenstände, die man zu folgenden Preisen auch vor Ort mieten kann:

Kopfkissen: 1 €

Knie- und Ellbogenschützer: 2 €

Helm: 3 €

Schlafsack: 4 €

Inlineskates: 5 €

Nachdem Leon seine Kleidung eingepackt hat, ist im Koffer noch Platz. Er überlegt, welche Gegenstände er einpackt und welche er vor Ort mietet. Er weiß:

(1) Der freie Platz im Koffer würde vollständig vom Kissen eingenommen werden.
(2) Der Schlafsack würde nur die Hälfte des freien Platzes im Koffer benötigen.
(3) Die Inlineskates brauchen genauso viel Platz wie der Schlafsack, aber dreimal so viel Platz wie der Beutel mit den Knie- und Ellbogenschützern.
(4) Der Helm benötigt doppelt so viel Platz wie der Beutel mit den Knie- und Ellbogenschützern

Alle Gegenstände, die Leon nicht einpackt, muss er vor Ort mieten.

a) Welche Möglichkeiten hat Leon, Gegenstände so einzupacken, dass der Koffer genau voll wird?

b) Welche Gegenstände muss Leon einpacken, um möglichst wenig Mietkosten zu zahlen? Begründe deine Antwort und berechne die geringsten Mietkosten.

Olympiadeklasse **7**

65. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

650711

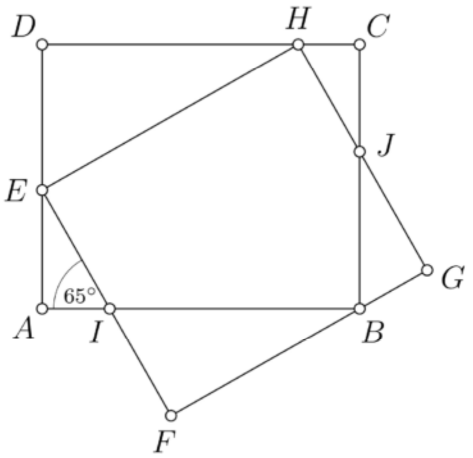
Tarik sieht auf sein Handy, das gerade die Uhrzeit 14:25 Uhr anzeigt. Er multipliziert alle vier Ziffern und erhält als Ziffernprodukt 40.

a) Ermittle das kleinste und das größte Ziffernprodukt, das bei Uhrzeiten auftreten kann.

b) Ermittle die Anzahl aller Uhrzeiten mit dem Ziffernprodukt 40.

650712

Gegeben sind zwei Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$, bei denen der Punkt E auf der Strecke $\overline{AD}$ liegt, die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ einander im Punkt I schneiden und der Winkel EIA die Größe $65°$ hat, der Punkt B auf der Strecke $\overline{FG}$ liegt, der Punkt H auf der Strecke $\overline{CD}$ liegt und die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{GH}$ einander im Punkt J schneiden, siehe die nebenstehende Abbildung.



a) Zeige, dass die Dreiecke AIE, BIF, BGJ, CHJ und DEH alle dieselben Innenwinkelgrößen haben.

b) Berechne die Größen der Innenwinkel im Fünfeck $BJHEI$.

650713

Weise nach, dass es in jedem Kalenderjahr genau einen Wochentag gibt, der nie der 31. Tag eines Monats dieses Kalenderjahres ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

650714

In einer Ebene sollen fünf Punkte A, B, C, D und E derart liegen, dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen.

a) Zeichne fünf Punkte, die die genannte Forderung erfüllen.

b) Ermittle die Anzahl aller Geraden, die jeweils genau zwei dieser fünf Punkte enthalten.

c) Ermittle die Anzahl aller Dreiecke, deren Ecken jeweils genau drei dieser gegebenen Punkte sind.

d) Wir betrachten nun fünf weitere Punkte F, G, H, I und J, für die von den Punkten A, B, C, D, E, F, G, H, I und J keine drei auf einer Geraden liegen.

   Ermittle die Anzahl aller Dreiecke, deren Ecken jeweils genau drei dieser gegebenen Punkte sind.

Olympiadeklasse **8**

65. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

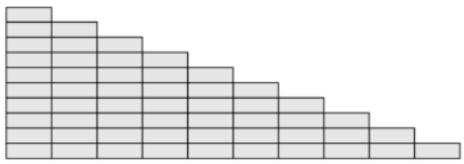
650811

In einer Mathe-AG stellt die AG-Leiterin drei Gefäße auf den Tisch. Das erste Gefäß fasst genau 10 Liter und ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Das zweite Gefäß fasst genau 5 Liter und ist leer. Das dritte Gefäß fasst genau 3 Liter und ist ebenfalls leer. Keines der Gefäße hat eine Mess-Skala. Nur durch Umgießen soll die Wassermenge, die sich im ersten Gefäß befindet, so auf die drei Gefäße verteilt werden, dass sich schließlich in einem der Gefäße genau 1 Liter Wasser befindet. Die AG-Leiterin behauptet: „Das schafft man mit viermaligem Umgießen."

Beweise, dass diese Behauptung richtig ist.

650812

Marie und Olga sehen in einem Baumarkt ein Ziegeldreieck, das sind Ziegel, die in Form eines rechtwinkligen Dreiecks gestapelt sind, siehe Abbildung. In der untersten Reihe liegen 10 Ziegel.



In jeder weiteren Reihe darüber liegt ein Ziegel weniger bis zur 10. Reihe, in der nur noch ein Ziegel liegt.

Marie will wissen, wie viele Ziegel dort insgesamt gestapelt sind, und beginnt laut die Anzahlen der jeweiligen Reihen zu addieren. Olga unterbricht sie schnell und nennt die korrekte Anzahl. „Wie bist du so schnell darauf gekommen?" fragt Marie. Olga antwortet: „Ich habe die Summenformel von Gauß angewandt."

Der Satz zur Gaußschen Summenformel lautet:

> *Für alle natürlichen Zahlen n größer als 0 ist $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.*

a) Begründe die Gaußsche Summenformel am Beispiel $n = 10$. Ergänze dazu das Ziegeldreieck aus der Abbildung mit einer Kopie des Ziegeldreiecks zu einem Rechteck. Berechne die Anzahl an Ziegeln in diesem Rechteck und damit die Anzahl an Ziegeln im Ziegeldreieck.

b) Berechne die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.

c) Berechne die Summe aller ungeraden natürlichen Zahlen kleiner als 1000.

d) Berechne die Summe aller durch 8 teilbaren natürlichen Zahlen zwischen 65 und 2025.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

650813

In einer Reihe liegen genau 65 Karten. Alle Karten liegen mit der Vorderseite nach oben. Die Karten sind von links nach rechts von 1 bis 65 aufsteigend nummeriert.

Im ersten Schritt wird jede Karte umgedreht. Im zweiten Schritt wird jede zweite Karte umgedreht, also die Karten mit den Nummern 2, 4, 6, 8 und so weiter. Im dritten Schritt wird jede dritte Karte umgedreht, also die Karten mit den Nummern 3, 6, 9, 12 und so weiter. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis im 65. Schritt jede 65. Karte umgedreht wird, also nur die Karte mit der Nummer 65.

Untersuche, welche Karten am Ende mit der Rückseite nach oben liegen.

650814

Das Geometrie-Programm GeoMO zur ebenen Geometrie beherrscht neben der bedingungslosen Wahl von Punkten in der Ebene folgende Konstruktionen jeweils aus vorgegebenen oder schon konstruierten Objekten:

- Konstruktion der **Geraden** durch zwei verschiedene Punkte und des **Kreises** um einen Punkt als Mittelpunkt und durch einen anderen Punkt oder mit der Länge einer Strecke als Radiuslänge.
- Konstruktion der **Schnittpunkte** zweier Geraden, zweier Kreise sowie einer Geraden und eines Kreises.
- Konstruktion der **Mittelsenkrechten** und des **Mittelpunkts** einer Strecke, der **Winkelhalbierenden** eines Winkels, der **Parallelen** und der **Senkrechten** zu einer Geraden durch einen Punkt.
- Konstruktion von **Strecken**, **Strahlen**, **Halbebenen**, **Winkeln**, **Kreisbögen** und **Vielecken** aus sie eindeutig bestimmenden Punkten, Geraden oder Kreisen.
- Auswahl eines Punktes aus mehreren Punkten sowie die Wahl eines Punktes, der auf, innerhalb oder außerhalb eines Objektes liegt, zwischen Objekten liegt oder verschieden von einem Punkt ist.

Weitere Konstruktionen beherrscht dieses Programm nicht, sie sind also bei Bedarf aus den obigen zusammenzusetzen.

In GeoMO sind zwei voneinander verschiedene, zueinander parallele Geraden g und h sowie ein Punkt P zwischen ihnen vorgegeben. Es ist ein Kreis k zu konstruieren, der g und h berührt und durch P verläuft.

a) Gib eine Konstruktionsbeschreibung mit Konstruktionsschritten des Programms GeoMO zur Konstruktion eines solchen Kreises an.

b) Fertige eine Zeichnung mit den in der Konstruktionsbeschreibung aus Teil a) beschriebenen Punkten, Geraden und Kreisen an und beschrifte in dieser Zeichnung die verwendeten Punkte, Geraden und Kreise.

c) Begründe, warum der nach der Konstruktionsbeschreibung aus Teil a) konstruierte Kreis k die Forderungen erfüllt.

Olympiadeklassen **9–10**

65. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

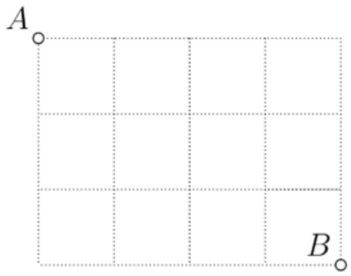
2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

651011

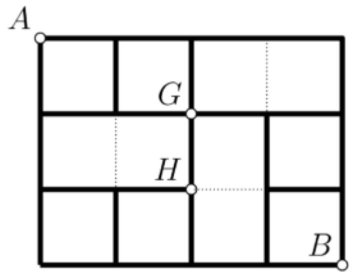
In allen Aufgabenteilen betrachten wir Wegepläne, deren Wege auf den Gitterlinien eines Quadratgitters (wie Abbildung A 651011 a) liegen und deren Zielpunkt rechts unterhalb des Startpunkts liegt. In den Grafiken sind die Gitterlinien als gepunktete und die Wege als fette Linien dargestellt (siehe Abbildung A 651011 b). Die Wegepläne sind rechteckig, d.h. ihr äußerer Rand ist ein Rechteck, bei dem Start- und Zielpunkt einander als Eckpunkte diagonal gegenüberliegen. Die Gitterquadratseiten seien Einheitsstrecken (haben also die Länge 1). Gefragt wird jeweils nach der Anzahl der kürzesten Wege vom Start- zum Zielpunkt auf dem Wegeplan. Die Antwort kann in a) und in b) ohne Begründung angegeben werden.

a) Wie viele kürzeste Wege von A nach G und wie viele kürzeste Wege von A nach H gibt es in Abbildung A 651011 b?

b) Wie viele kürzeste Wege von A nach B gibt es in Abbildung A 651011 b?



A 651011 a



A 651011 b

c) Entwerfen Sie einen rechteckigen Wegeplan mit einem Startpunkt A und einem weiter rechts und weiter unten liegenden Zielpunkt B, in welchem es genau 20 kürzeste Wege von A nach B gibt. Wege zählen dabei nur als kürzeste Wege, wenn sie nur von links nach rechts bzw. von oben nach unten durchlaufen werden. Hier ist nachzuweisen, dass es tatsächlich 20 Wege sind.
Hinweis: Das zugrunde gelegte Quadratgitter darf von der Größe 3×4 der Beispielabbildung (Abbildung A 651011 a) abweichen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

651012

In dieser Aufgabe sind a und b positive ganze Zahlen.

a) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 65$ an.
b) Geben Sie alle Lösungen (a, b) der Gleichung $a^2 + b^2 = 340$ an.
c) Hat die Gleichung $a^2 + b^2 = 8024$ Lösungen, bei denen a und b ebenfalls positive ganze Zahlen sind?

Hinweis: Die Gleichung $a^2+b^2 = 13$ hat im Bereich der positiven ganzen Zahlen die Lösungen $(2, 3)$ und $(3, 2)$, denn es gilt

$$2^2 + 3^2 = 3^2 + 2^2 = 13\,.$$

651013

In dieser Aufgabe werden drei lineare Gleichungssysteme mit zunächst in a) und b) jeweils vier und in c) mit sechs Unbekannten untersucht. Die Variablen sollen dabei durch reelle Zahlen ersetzt werden, sodass alle Gleichungen erfüllt sind.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems.

$$a + b + c = 1 \quad (1)$$
$$b + c + d = 2 \quad (2)$$
$$c + d + a = 3 \quad (3)$$
$$d + a + b = 4 \quad (4)$$

Hinweis: Erkennen Sie, wie man zuerst die Summe $a + b + c + d$ bestimmen kann?

b) Zeigen Sie, dass das folgende Gleichungssystem keine Lösung hat.

$$a + b = 0 \quad (1)$$
$$b + c = 0 \quad (2)$$
$$c + d = 0 \quad (3)$$
$$d + a = 1 \quad (4)$$

c) Geben Sie zwei verschiedene Lösungen des folgenden Gleichungssystems an.

$$a + b + c = 0 \quad (1)$$
$$b + c + d = 0 \quad (2)$$
$$c + d + e = 0 \quad (3)$$
$$d + e + f = 0 \quad (4)$$
$$e + f + a = 0 \quad (5)$$
$$f + a + b = 0 \quad (6)$$

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

651014

In dieser Aufgabe sollen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Dabei werden zufällig zwei bzw. drei Zahlen ohne Zurücklegen (bzw. mit einem Griff) aus der Menge der aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $\{2025, 2026, 2027, \cdots, 2039, 2040\}$ gezogen.

a) Es werden genau zwei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die positive Differenz der beiden Zahlen durch 6 teilbar?

b) Es werden genau drei Zahlen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Summe der drei Zahlen mindestens 6116?

Hinweis: Zufälliges Ziehen soll bedeuten, dass alle Möglichkeiten des Ziehens von zwei bzw. drei Zahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten.

651015

In einem rechtwinkligem Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-1,0)$, $B(b,3)$, $C(1,6)$ und $D(-3,2)$ gegeben. Dabei ist b eine reelle Zahl größer als -2.

Bestimmen Sie jeweils alle Werte von b, für die

a) die vier Punkte ein bei C rechtwinkliges Viereck $ABCD$ bilden,

b) die vier Punkte ein Trapez $ABCD$ bilden,

c) die vier Punkte ein Sehnenviereck $ABCD$ bilden,

d) die vier Punkte ein Viereck $ABCD$ mit dem Flächeninhalt 5 bilden.

651016

Gegeben sind fünf Punkte durch ihre Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem: $A(0,18)$, $B(0,12)$, $C(8,12)$, $D(0,0)$ und $E(24,0)$. Der Punkt S sei der Schnittpunkt der Geraden CD und BE. Der Punkt F sei der Schnittpunkt der Gerade AS mit der x-Achse.

a) Berechnen Sie die Flächeninhalte des Dreiecks DFS und des Dreiecks FES.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks CSE.

Olympiadeklassen 11–13

65. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

651211

Die sechsstellige Zahl 651211, die Nummer dieser Aufgabe, hat folgende Eigenschaften:

(1) Die Ziffer 0 kommt nicht vor.

(2) Die Summe der beiden ersten Ziffern ist gleich der Zahl, die die beiden letzten Ziffern bilden.

(3) Die Zahl, die die beiden mittleren Ziffern bilden, ist um 1 größer als die Summe der beiden ersten Ziffern.

Durch diese drei Bedingungen ist die Zahl 651211 nicht eindeutig bestimmt.

Man ermittle, wie viele sechsstellige Zahlen es gibt, die die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen.

651212

Von vier positiven ganzen Zahlen ist folgendes bekannt:

(1) Alle Zahlen sind ungerade. Keine zwei der Zahlen sind gleich.

(2) Die kleinsten zwei der Zahlen sind Primzahlen.

(3) Ordnet man die Zahlen in aufsteigender Reihenfolge, so bilden die drei Differenzen benachbarter Zahlen eine streng monoton wachsende arithmetische Folge.

Man bestimme den kleinstmöglichen Wert des Produkts aller vier Zahlen.

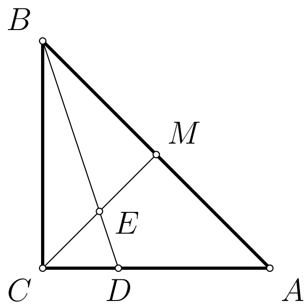
Hinweis: Eine Folge $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ von Zahlen heißt *streng monoton wachsend,* wenn $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k$ gilt. Die Folge ist eine *arithmetische Folge,* wenn es eine feste Zahl r gibt, für die $n_2 = n_1 + r$, $n_3 = n_2 + r$, $n_4 = n_3 + r$, $\ldots$, $n_{k-1} = n_{k-2} + r$ und $n_k = n_{k-1} + r$ ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

651213

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, und der Punkt D liegt auf der Strecke $\overline{CA}$. Die Strecken $\overline{CM}$ und $\overline{BD}$ schneiden sich im Punkt E, vgl. Abbildung A 651213.

Man bestimme den Flächeninhalt des Vierecks $DAME$, wenn $\overline{CA}$ die Länge 12 und $\overline{CD}$ die Länge 4 hat.



A 651213

651214

Ein König will die acht Ritter seines Reichs zu einem Fest einladen. In der Königsburg gibt es aber nur fünf Gästezimmer, sodass drei Ritter gemeinsam im Saal einquartiert werden müssen.

Nun weiß der König, dass eine gewisse Zahl n von Paaren seiner Ritter gerade in Fehde liegen. Von jedem dieser Paare kann jeweils höchstens ein Ritter im Saal untergebracht werden.

a) Man zeige, dass die Ritter immer konfliktfrei einquartiert werden können, wenn $n \leq 11$ gilt.

b) Man zeige, dass für $n \geq 12$ eine konfliktfreie Belegung des Saals nicht in jedem Fall möglich ist.